MATEMATIKA ZA BIZNIS

Prof. dr. Vladimir Kašćelan

KRATKI REPETITORIJUM ELEMENTARNE MATEMATIKE

SKUP obrazuju objekti koji imaju neku zajedničku osobinu.

Objekti koji obrazuju skup nazivaju se **ELEMENTI SKUPA.**

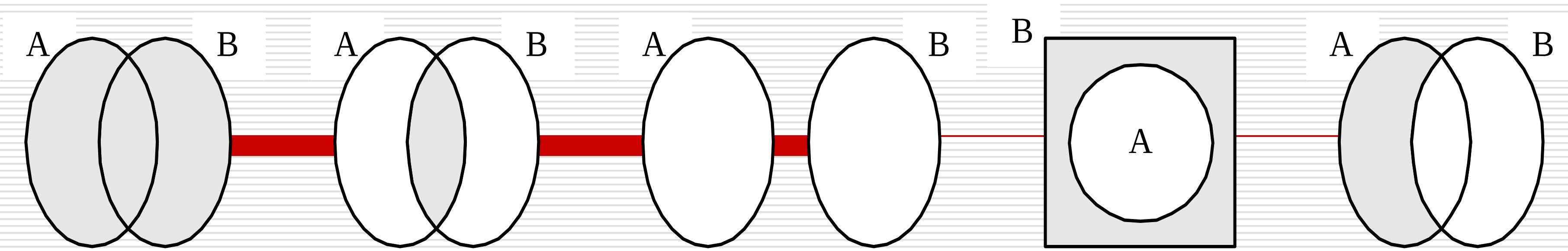
Skup je **DAT** ako su u velikoj zagradi navedeni svi njegovi elementi (bez ponavljanja) ili, pak, ako je dato pravilo koje utvrđuje da li neki objekat pripada ili ne pripada skupu.

PRAZAN SKUP je skup koji ne sadrži nijedan objekat i označava se sa $\emptyset$.

Za skupove A i B kažemo da su **JEDNAKI** u oznaci $A = B$, ako su svi elementi skupa A elementi i skupa B i obrnuto.

Skup A je **PODSKUP** skupa B, u oznaci $A \subseteq B$, ako svi elementi skupa A pripadaju skupu B.

O SKUPU



slika 1a) slika 1b) slika 1c) slika 1d) slika 1e)

UNIJOM skupova A i B, $A \cup B$ zovemo skup C koga obrazuju svi elementi skupa A i svi elementi skupa B (Slika 1a).

PRESJEKOM skupova A i B zovemo skup C koga obrazuju zajednički elementi skupova A i B (Slika 1b).

DISJUNKTNI skupovi su skupovi čiji je presjek prazan skup (Slika 1c).

Ako je skup A podskup skupa B definišemo **KOMPLEMENT** skupa A, u oznaci CA ili $\overline{A}$, kao skup svih elemenata iz B koji nijesu u A (Slika 1d).

RAZLIKOM SKUPOVA A i B, oznaka $A \setminus B$ zovemo skup koga obrazuju svi elementi skupa A koji ne pripadaju skupu B (Slika 1e).

O SKUPU

Par objekata a i b sa utvrđenim redosljedom zovemo **UREĐENI PAR** i zapisujemo u obliku (a, b).

Objekat a je prva, objekat b je druga koordinata uređenog para (a, b).

Dva uređena para (a, b) i (c, d) su **jednaka**, ako su im jednake odgovarajuće koordinate, tj.

$$(a,b)=(c,d)\Rightarrow a=c \quad \text{i} \quad b=d$$

Dekartovim prizvodom skupova A i B, oznaka AxB , zovemo skup svih uređenih parova čija je prva koordinata iz skupa A, a druga koordinata iz skupa B. Simbolički:

$$A=\left\{(a,b)\,\middle|\,a\in A,\ b\in B\right\}$$

FUNKCIJA

Neka su X i Y neprazni skupovi i f pravilo po kome svakom elementu x skupa X odgovara jedan element skupa Y. Tada trojku (X, Y, f) zovemo **FUNKCIJOM NA SKUPU X SA VRIJEDNOSTIMA U SKUPU Y** :

$$f : X \to Y,\ f(x) = y$$

gdje je:

- ✓ X - domen,
- ✓ Y - kodomen (antidomen),
- ✓ x - argument ili nezavisna promjenljiva,
- ✓ y - zavisna promjenljiva (funkcija od $(x - a)$
- ✓ (x, y) - par odgovarajućih vrijednosti funkcije.

BROJEVNI SKUPOVI

Skupovi čiji su elementi brojevi zovemo **BROJEVNIM SKUPOVIMA**.

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ **skup prirodnih brojeva**

$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ **skup cijelih brojeva**

$Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z, q \in Z \setminus \{0\} \right\}$ **skup racionalnih brojeva ili razlomaka**

I - **skup iracionalnih brojeva** (obrazuju ga neperiodični decimalni razlomci)

R -skup realnih brojeva

$$R = \{\pm a_0, a_1, \ldots a_n \ldots | a_0 \in N \cup \{0\}, a_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, i = 1, 2, \ldots\}$$

ARITMETIČKI NIZ

ARITMETIČKI NIZ ili ARITMETIČKA PROGRESIJA je niz od n realnih brojeva kod kojih je razlika svaka dva uzastopna člana ovog konačnog niza (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstanta.

Neka je d konstantna razlika odnosno ***diferencija*** .

Slijede relacije:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

Odnosno

$$a_i = a_1 + (i-1)d, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

ARITMETIČKI NIZ

Primjenjujući poslednju relaciju imamo da je:

$$a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)d$$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + d + a_1 + (n-2)d = 2a_1 + (n-1)d$$

Odnosno

$$\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_{\mathrm{n}-1}$$

Na isti način se provjerava da važi:

$$a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \ldots$$

ARITMETIČKI NIZ

Kako je za: $i-k \in \{1,2,\ldots,n\}$ i $i+k \in \{1,2,\ldots,n\}$ $i,k \in N$

$$a_{i-k} = a_1 + (i-k-1)d$$

$$a_{i+k} = a_1 + (i+k-1)d$$

To je

$$a_{i-k} + a_{i+k} = 2a_1 + 2(i-1)d = 2\left[a_1 + (i-1)d\right] = 2a_i$$

Odnosno:

$$a_i = \frac{a_{i-k} + a_{i+k}}{2}$$

Proizvoljni član aritmetičkog niza je aritmetička sredina dva u odnosu na njega simetrična člana.

ARITMETIČKI NIZ

Zbir prvih n članova aritmetičkog niza je: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Kako je, takođe: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$

Slijedi: $2\sum_{i=1}^{n} a_i = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1) = n \cdot (a_1 + a_n)$

Odnosno: $$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

GEOMETRIJSKI NIZ

GEOMETRIJSKI NIZ je niz n realnih brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana (proizvoljnog i njemu prethodnog) konstantan.

$$a_2 = a_1 q$$

$$a_3 = a_2 q = a_1 q^2$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$\boxed{a_i^2 = a_{i-k} \cdot a_{i+k}}$$

proizvoljni član a_i, $i \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ je geometrijska sredina dva u odnosu na njega simetrična člana

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} q^n}$$

Zbir prvih n uzastopnih članova geometrijskog niza

ELEMENTARNE FUNKCIJE

LINEARNA FUNKCIJA - funkcija odnosno pravilo po kome proizvoljnom $x \in R$ odgovara realan broj y takav da je:

$$\boxed{y = ax + b}$$

gdje su a i b realni brojevi.

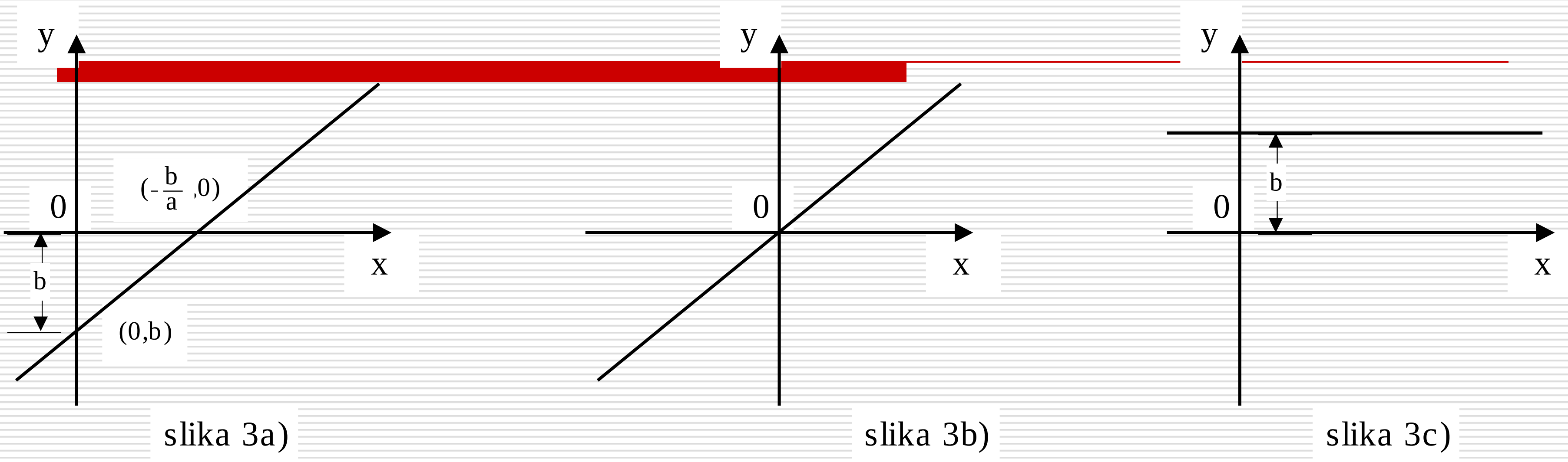
- Za $a \neq 0$, **nule** su rješenja jednačine $ax + b = 0$, tj. $x = \frac{-b}{a}$
- Funkcija je pozitivna na intervalu na kome je $ax + b > 0$ što znači da je za a > 0 funkcija pozitivna na intervalu $(\frac{-b}{a}, \infty)$, a za a < 0 obrnuto.
- Kako važi da je razlika odgovarajućih vrijednosti u tačkama x_1 i x_2; $x_1 < x_2$

$$y_2 - y_1 = ax_2 + b - (ax_1 + b) = a(x_2 - x_1)$$

Slijedi: Za **a > 0** linearna funkcija stalno raste;

za **a < 0** - obrnuto.

LINEARNA FUNKCIJA



- Slika 3 a) - **LINERNA FUNKCIJA** $\boxed{y = ax + b}$
- Slika 3 b) – **FUNKCIJA DIREKTNE PROPORCIONALNOSTI** $\boxed{y = ax}$

(slučaj kada je b=0 i $a \neq 0$)

- Slika 3c) – **FUNKCIJA OBLIKA** $\boxed{y = b}$

(slučaj kada je $a = 0$)

KVADRATNA FUNKCIJA

Opšti oblik kvadratne funkcije $\boxed{y = ax^2 + bx + c}$ $a, b, c \in R$

Za $b^2 - 4ac \geq 0$ funkcija ima dvije realne nule $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

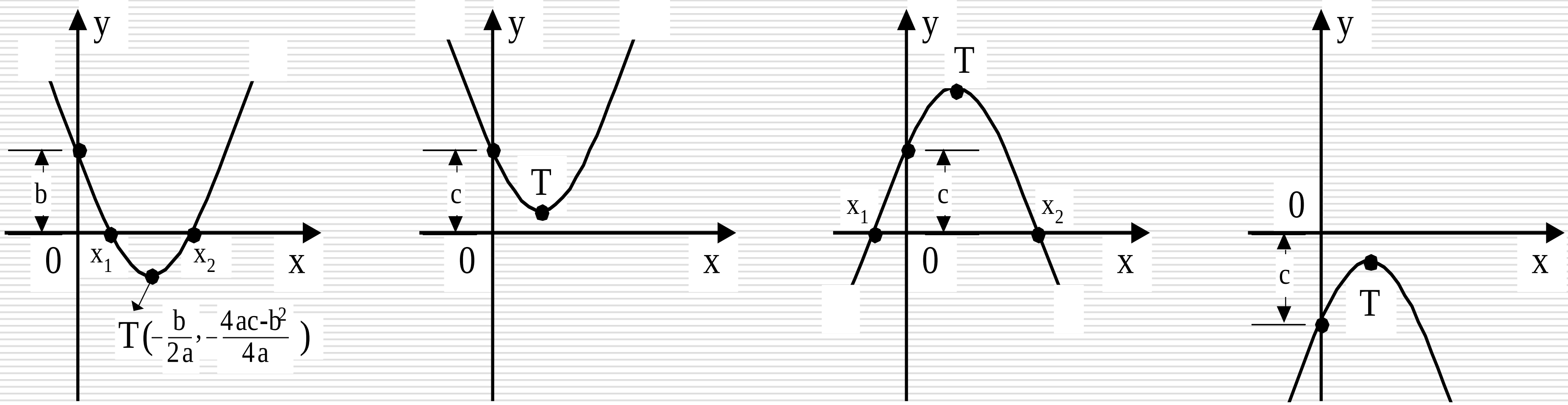
Za **a > 0** kvadratna funkcija

na intervalu $(-\infty, \dfrac{-b}{2a})$ opada do vrijednosti $y_{min} = \dfrac{4ac - b^2}{4a}$

a na intervalu $(\dfrac{-b}{2a}, \infty)$ raste.

KVADRATNA FUNKCIJA

Grafik kvadratne funkcije – **PARABOLA.**



slika 4a) slika 4b) slika 4c) slika 4d)

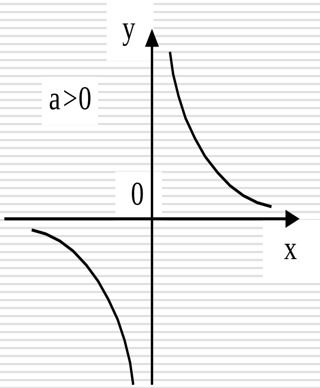
Slika 4a i 4b – grafik kvadratne funkcije za a>o zavisno od toga da li funkcija ima realne nule.

Slika 4c i 4d - grafik kvadratne funkcije za a<0 zavisno od toga da li funkcija ima realne nule.

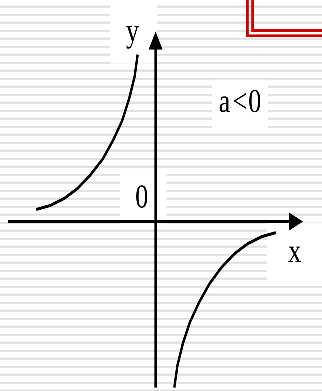
RAZLOMLJENA FUNKCIJA

FUNKCIJA OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI

Opšti oblik razlomljene funkcije: $\boxed{y = \dfrac{a}{x}}$ $\quad a \neq 0$



slika 5a)



slika 5b)

HIPERBOLA – grafički prikaz razlomljene funkcije.

- Domen: $D = R \setminus \{0\}$
- Data funkcija nema nulu.
- Za **a >0** na intervalu $(0, \infty)$ **funkcija je pozitivna, a n**a intervalu $(-\infty, 0)$ **funkcija je negativna.**

- Za a > 0 funkcija opada na čitavom domenu, a za a < 0 raste.

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

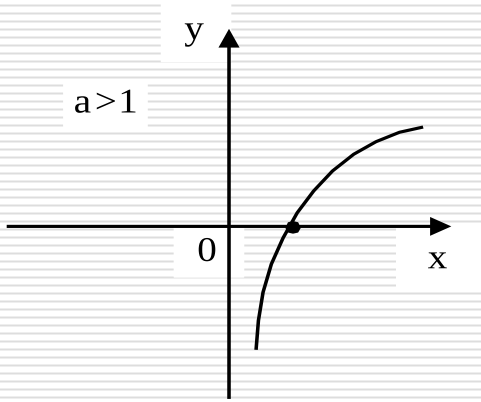
Opšti oblik eksponencijalne funkcije: $\boxed{y = a^x}$ $a \in R^+ \setminus \{1\}$

slika 6a) slika 6b)

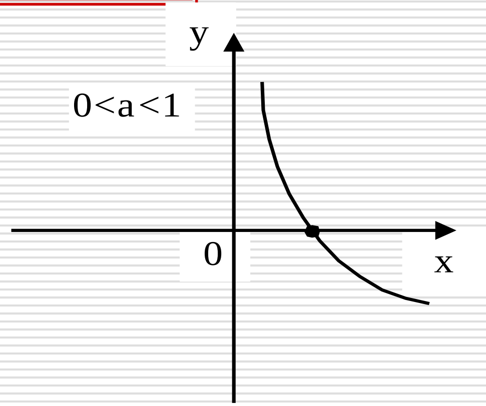
- Funkcija nema nula i uvijek je pozitivna.
- Za a > 1 funkcija raste a za 0<a<1 funkcija opada.
- Grafički prikaz funkcije je **EKSPONENCIJALNA KRIVA.**

LOGARITAMSKA FUNKCIJA

Opšti oblik logaritamske funkcije: $\boxed{y = \log_a x}$ $a \in R^+ \setminus \{1\}$



slika 7a)

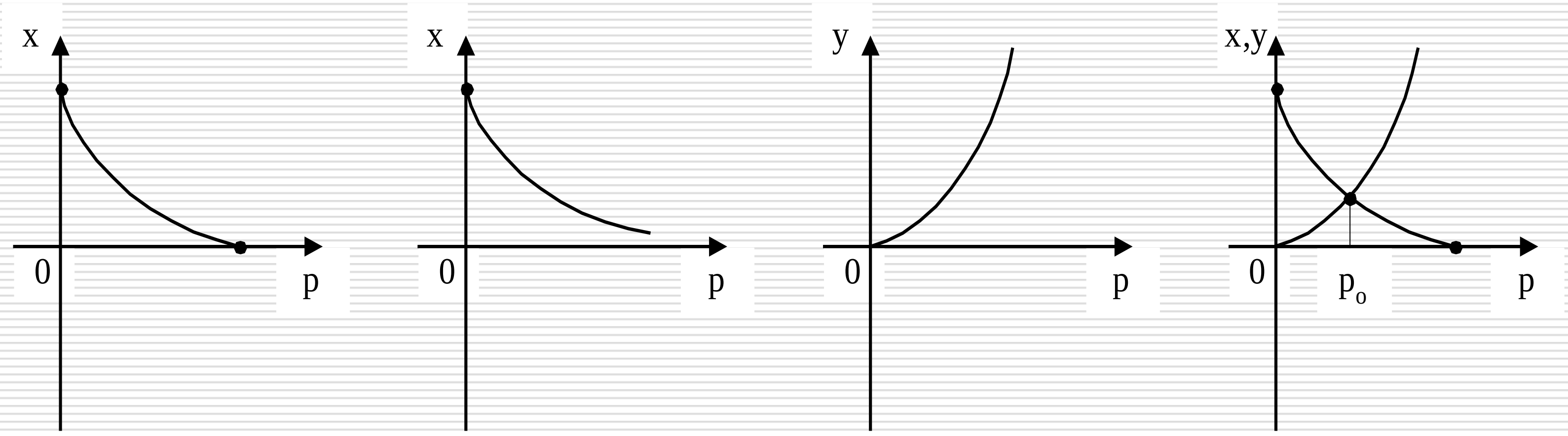


slika 7b)

- Nula funkcije je x = 1.
- Za **a > 1** funkcija je pozitivna na intervalu $(1,\infty)$ a negativna je na intervalu $(0,1)$. Za **0 < a < 1** je obrnut slučaj.
- Za **a > 1** funkcija raste na cijelom intervalu definisanosti a za **0 < a < 1** je obrnuto.
- Grafički prikaz funkcije je **LOGARITAMSKA KRIVA.**

EKONOMSKE FUNKCIJE

❖ Osnovnim ekonomskim veličinama (kategorijama) smatramo **cijenu, tražnju, ponudu, proizvodnju, prihod, troškove i dobit.**



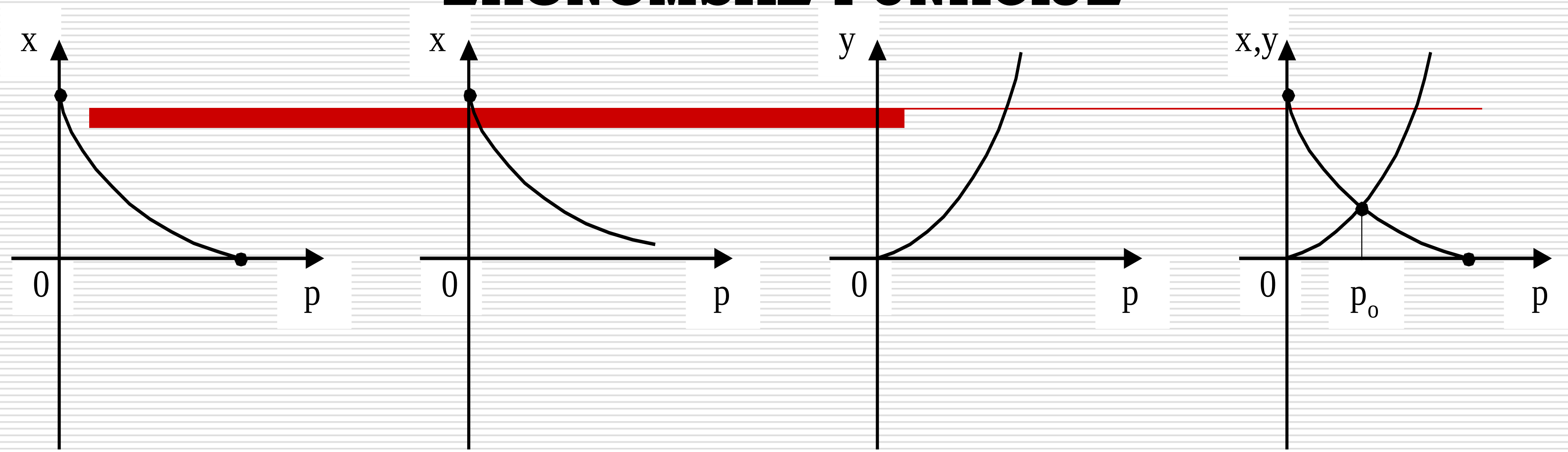
slika 9a) slika 9b) slika 10a) slika 10b)

Na slici 9a) i 9b) predstavljena je **FUNKCIJA TRAŽNJE.**

❖ Sa rastom cijene tražnja opada.

❖ Najveću vrijednost funkcija tražnje ima pri cijeni p = 0, dok najmanju vrijednost dostiže ili ne dostiže zavisno od toga da li je u pitanju luksuzni proizvod (cigareta, automobil) ili proizvod od vitalnog značaja (hljeb, lijek).

EKONOMSKE FUNKCIJE

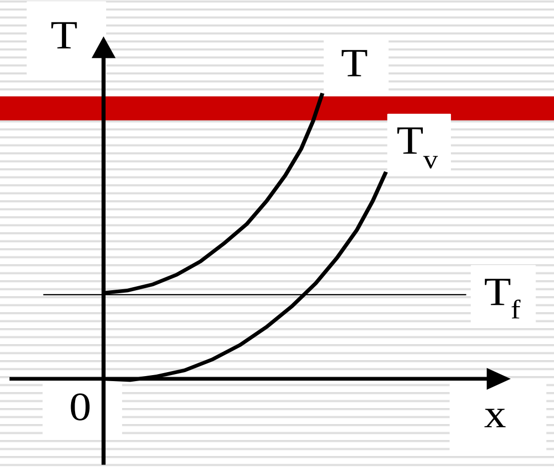


slika 9a) slika 9b) slika 10a) slika 10b)

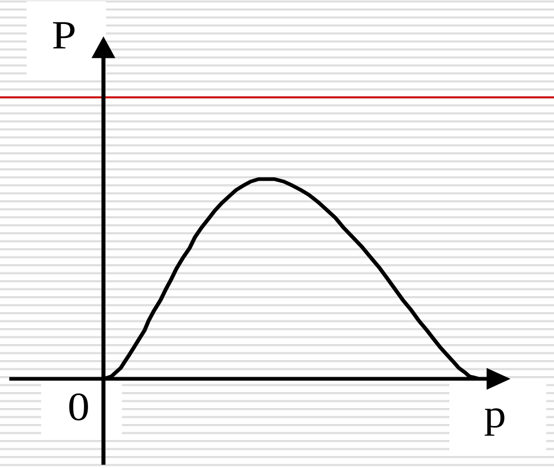
Slika 10 a) – grafički prikaz PONUDE. Kada cijena raste raste i ponuda. Pri cijeni p = 0 ponuda je y = 0.

Slika 10 b) – grafičko predstavljanje **RAVNOTEŽNE CIJENE**. Iz pretpostavke o neprekinutosti funkcije tražnje i ponude nekog proizvoda i monotonosti tih funkcija slijedi da postoji neka vrijednost p_0 argumenta p za koju se te funkcije izjednačavaju. Tu vrijednost argumenta p zovemo ***ravnotežnom cijenom (tržišnom cijenom).***

TROŠKOVI I PRIHOD



slika 11a)



slika 11b)

Slika 11 a) – grafički prikaz **ukupnih troškova T**, **fiksnih troškova T_f** i **varijabilnih troškova T_v**.

Prosječni troškovi su troškovi po jedinici proizvodnje

$$\boxed{\overline{T} = \frac{T}{x}}$$

Slika 11 b) – grafički prikaz **PRIHODA.**

Prihod je jednak proizvodu cijene i tražnje (proizvodnje). $\boxed{P = p\,x}$

Pretpostavljamo da, do određene cijene, prihod raste, a zatim opada. Za $p=0 \Rightarrow P=0$.

DOBIT

Dobit D (x) pri proizvodnji x je razlika odgovarajućeg prihoda i troškova:

$$\boxed{D(x) = P(x) - T(x)}$$

INTERVAL RENTABILITETA je interval proizvodnje na kome je dobit pozitivna, a njegovi krajevi su ***donja* i *gornja* granica rentabiliteta**.

Pretpostavljamo da su sve osnovne ekonomske funkcije pozitivne osim dobiti koja može biti i negativna.